Producto de Wallis, función gamma y esferas n-dimensionales

Thomas Peters Páginas de matemáticas de Thomas www.mathe-seiten.de

26 de octubre de 2003

El objetivo de este artículo es deducir fórmulas para el volumen y la superficie de esferas n-dimensionales. Así, se calcula el producto de Wallis y se presentan algunas propiedades de la función gamma gaussiana.

El producto Wallis

Como volveremos sobre ello más adelante, empecemos por calcular las integrales

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx.$$

Para ello, primero suponemos $n \geq 2$. La integración parcial y trigonométrica de Pitágoras da como resultado

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x \, dx &= \Big[\operatorname{sen}^{n-1} x(-\cos x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(n-1) \operatorname{sen} x \cos x \, (-\cos x) \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\
&= (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx.
\end{aligned}$$

Si trasladamos el último término al otro lado, obtenemos la fórmula de recursión

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx.$$

Desde

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^0 x \, dx = \frac{\pi}{2}$$

y

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^1 x \, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

se obtiene para $n = 2k$ par

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k} x \, dx = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j}$$

y para n impar $= 2k+1$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k+1} x \, dx = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1}.$$

En realidad, esto es todo lo que necesitamos para más adelante. Pero ya que estamos tan cerca, vamos a ir un poco más allá y derivar la fórmula del producto mencionada anteriormente.

Puesto que para $0 \le x \le \pi/2$ $0 \le \operatorname{sen} x \le 1$ se sigue

$$\sin^{2k+1} x \le \sin^{2k} x \le \sin^{2k-1} x$$

y por lo tanto también

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k+1} x \, dx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k} x \, dx \le \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2k-1} x \, dx.$$

Si insertamos las fórmulas de los productos que acabamos de derivar, obtenemos

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{2j}{2j+1} \le \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \le \prod_{j=1}^{k-1} \frac{2j}{2j+1}$$

y la división por el producto de la derecha

$$\frac{2k}{2k+1} \le \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2-1}{4j^2} \le 1.$$

Pero porque

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2k}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k-1}{2k} = 1$$

sigue inmediatamente

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{4j^2-1}{4j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{4j^2-1}{4j^2}.$$

Esta es la famosa *fórmula del producto Wallis*.

La función gamma

El siguiente paso es deducir algunas propiedades de la función gamma. Ésta se introdujo en el artículo sobre el factorial como una generalización del factorial a los números reales (y complejos) [1]. Allí se definió como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

También se demostró que para $x > 0$ cumple la *ecuación funcional*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

[1]Aquí sólo consideramos x reales.

se cumple. ¡Con $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, se deduce que $\Gamma(x) = (x - 1)!$ La ecuación funcional muestra inmediatamente que la función gamma tiene inicialmente polos en $x = 0$ y después para todos los enteros negativos, que resultan ser impares. Esto se debe a que la ecuación funcional

$$\Gamma(x + 2) = \Gamma((x + 1) + 1) = (x + 1)\Gamma(x + 1) = (x + 1)x\Gamma(x)$$

y en general

$$\Gamma(x + n + 1) = (x + n)(x + n - 1) \cdots x\Gamma(x).$$

Esto demuestra que la función gamma ya está totalmente determinada por sus valores para $0 < x \le 1$. La división nos da

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x + n + 1)}{x(x + 1) \cdots (x + n)},$$

a partir de la cual se obtiene para $x := -n$ se obtiene la afirmación sobre las posiciones de los polos.

Continuamos nuestras investigaciones remodelando ligeramente la ecuación de definición. Debido a

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

schreiben wir

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

Ahora la integración parcial conduce a

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \left[\frac{t^x}{x}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right]_0^n - \int_0^n \frac{t^x}{x}\, n\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} \left(-\frac{1}{n}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt.$$

Esta integral se vuelve a integrar parcialmente

$$\int_0^n t^x \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1}\right]_0^n - \int_0^n \frac{t^{x+1}}{x+1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} \left(-\frac{n-1}{n}\right) dt$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{x+1} \cdot \int_0^n t^{x+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt,$$

de modo que para la integral original

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{x \cdot (x + 1)} \int_0^n t^{x+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} dt$$

se obtiene. Después de otras n2 integraciones parciales, el término de interferencia ha desaparecido y se tiene

$$\int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n-1)}\int_0^n t^{x+n-1}\,dt$$
$$= \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n-1)}\,\frac{n^{x+n}}{x+n}$$
$$= \frac{n^x}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Así pues, la importante *representación del producto de Gauss* es la siguiente

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x}{x\cdot(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Demostramos ahora que pueden deducirse directamente de *la representación del producto de Weierstrass*

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty} e^{x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}$$

con la *constante de Euler-Mascheroni*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

resultados. Para ello calculamos

$$\Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\cdot\prod_{k=1}^{\infty} e^{x/k}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1} = \frac{e^{-\gamma x}}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n} e^{x/k}\cdot\prod_{k=1}^{n} k\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n} e^{x/k}\cdot n!\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\gamma x}\exp\left(x\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\cdot n!\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+x}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left(x\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right)\right)\cdot n!\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+x}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(n^x\cdot n!\cdot\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+x}\right),$$

que ya es la reivindicación.

Para la última fórmula, utilizamos la *descomposición en fracciones parciales de la cotangente*

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}$$

volver[2]. El resultado es la *representación del producto de Wallis del seno*[3]

$$\operatorname{sen} \pi x = \pi x \prod \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).$$

Por un lado, la diferenciación se traduce en

$$\frac{(\operatorname{sen} \pi x)'}{\sin \pi x} = \pi \cot \pi x$$

y por otro lado

$$\frac{\left(x \prod_{k=1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)'}{x \prod_{k=1} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1} \frac{-2x}{k^2} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 - k^2}.$$

Con esto tenemos

$$\frac{(\operatorname{sen} \pi x)'}{\sin \pi x} = \frac{\left(x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)\right)'}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}.$$

Sin embargo, éste es precisamente el caso cuando

$$\left(\frac{\sin \pi x}{x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)}\right)' = 0$$

o

$$\operatorname{sen} \pi x = Cx \prod \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

se aplica. Sin embargo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \pi x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = \pi$$

y

$$\lim_{x \to 0} \prod \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) = 1,$$

de donde $C = \pi$ y por lo tanto se sigue la afirmación.

[2]Para una derivación, véase el artículo sobre las series de Fourier.

[3] El resultado de la última sección se sigue con $x = 1/2$.

Die Verbindung zur Gammafunktion lässt sich nun leicht herstellen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^x\, n!}\prod_{k=0}^{n}(x+k)\cdot\frac{1}{n^{1-x}\, n!}\prod_{k=0}^{n}(1-x+k)\right)\\ &= x\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2-x^2}{k^2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-x}{n}\\ &= x\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)=\frac{\sin\pi x}{\pi}.\end{aligned}$$

Con $x = 1/2$, sigue $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Más adelante resultará ventajoso que conozcamos los valores $\Gamma(n/2 + 1/2)$ y $\Gamma(n/2+ 1)$ para n natural. Para ello no necesitamos más que la ecuación funcional $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$. Primero, que n sea par. Entonces

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}\cdot\prod_{j=1}^{n/2}(2j-1)=\sqrt{\pi}\cdot\prod_{j=1}^{n/2}\frac{2j-1}{2}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=(n/2)!=\prod_{j=1}^{n/2}\frac{2j}{2}.$$

Lo demostramos por inducción. Las fórmulas son correctas para $n = 2$ porque

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

y $\Gamma(2) = 1$. Supongamos ahora que se aplican para $n - 2$. Entonces sigue

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)&=\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{n-1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\\ &=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2-1}}\cdot\prod_{j=1}^{n/2-1}(2j-1)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{n/2}}\cdot\prod_{j=1}^{n/2}(2j-1)\end{aligned}$$

y

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)!=(n/2)!$$

según el supuesto de inducción. Sea n impar. Entonces tenemos las fórmulas

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)=\left(\frac{n-1}{2}\right)!=\prod_{j=1}^{(n-1)/2}\frac{2j}{2}$$

y

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(n+1)/2}} \prod_{j=1}^{(n+1)/2} (2j-1) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{2j-1}{2}$$

que demostrar. Sin embargo, éstas resultan directamente de las sustituciones $n \to k-1$ o $n \to k+1$ de las demostradas anteriormente. Sólo queda comprobar la primera fórmula para $n = 1$, pero esto es trivial porque ¡0! = 1 es trivial[4].

Volumen y superficie de la esfera en el $\mathbb{R}^n$

En general, la esfera (euclidiana) de n dimensiones con radio r se define como

$$K_n(r) = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leq r^2 \right\}.$$

En los casos conocidos $n = 1$, obtenemos el intervalo $[-r, r]$ con longitud $V_1(r) = 2r$, para $n = 2$ el círculo con área $V_2(r) = \pi r^2$ y para $n = 3$ finalmente la esfera con volumen $V_3(r) = 4/3\pi r^3$. Inicialmente, no hay ninguna conexión reconocible entre n y el volumen n-dimensional $V_n(r)$. Sin embargo, existe una fórmula cerrada. Ésta es

$$V_n(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \cdot r^n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)} \cdot r^n.$$

Vemos inmediatamente que proporciona el resultado correcto para los casos que conocemos. Ahora procedemos a demostrarlo por inducción. En primer lugar, observamos que por simetría $V_n(r) = r^n V_n(1)$ y, por tanto, basta con limitarse al volumen de la esfera unitaria. Que la fórmula sea correcta para $n-1$. La esfera unidad en $\mathbb{R}^n$ está comprendida entre $x_n = -1$ y $x_n = 1$. Los planos $x_n =$ const. se intersecan en el intervalo $-1 < x_n < 1$ con $K_n(1)$ en una esfera $(n-1)$-dimensional de radio $\sqrt{1-x_n^2}$. El volumen de esta esfera es por condición de inducción

$$V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right) = \frac{2\sqrt{\pi}^{\,n-1}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot (1-x_n^2)^{(n-1)/2}.$$

El volumen de la esfera unitaria es ahora simplemente

$$V_n(1) = \int_{-1}^{1} V_{n-1}\left(\sqrt{1-x_n^2}\right) dx_n = \frac{2\sqrt{\pi}^{\,n-1}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\, dx_n.$$

La sustitución $x = \cos t$

$$\int_{-1}^{1} (1-x_n^2)^{(n-1)/2}\, dx_n = \int_{\pi}^{0} \operatorname{sen}^{n-1} t\,(-\operatorname{sen} t)\, dt = \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^n t\, dt = 2\int_0^{\pi/2} \sin^n t\, dt.$$

[4]El producto vacío es, por definición, 1.

Sin embargo, ya hemos calculado esta integral. Es para n par

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{n/2} \frac{2j-1}{2j}$$

y para n impar

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = \prod_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{2j}{2j+1}.$$

Con los resultados del último apartado, podemos utilizar estas fórmulas en la ecuación

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

para cualquier n. Esto da como resultado lo siguiente para el volumen

$$V_n(1) = \frac{2\sqrt{\pi^{n-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} = 2\pi^{n/2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Ya casi lo hemos conseguido. Sólo estamos escribiendo

$$(n-1) \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n-1) \cdot \frac{2}{n-1}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = n \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

y así obtener el resultado deseado

$$V_n(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}.$$

En la tabla 1.1 se indican los valores analíticos hasta $n = 10$ y los valores numéricos para la esfera unitaria. Si ahora nos divertimos y representamos gráficamente $V_n(1)$ sobre n real, obtenemos la curva de la figura 1.1. Puede reconocerse un máximo en $n \approx 5{,}26$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V_n(r)$	$2r$	πr^2	$\frac{4}{3}\pi r^3$	$\frac{\pi^2}{2}r^4$	$\frac{8\pi^2}{15}r^5$	$\frac{\pi^3}{6}r^6$	$\frac{16\pi^3}{105}r^7$	$\frac{\pi^4}{24}r^8$	$\frac{32\pi^4}{945}r^9$	$\frac{1}{120}r^{10}$
$V_n(1)$	2,00	3,14	4,19	4,93	5,26	5,17	4,72	4,06	3,30	2,55

Tabla 1.1: El volumen $V_n(r)$ de la esfera n-dimensional.

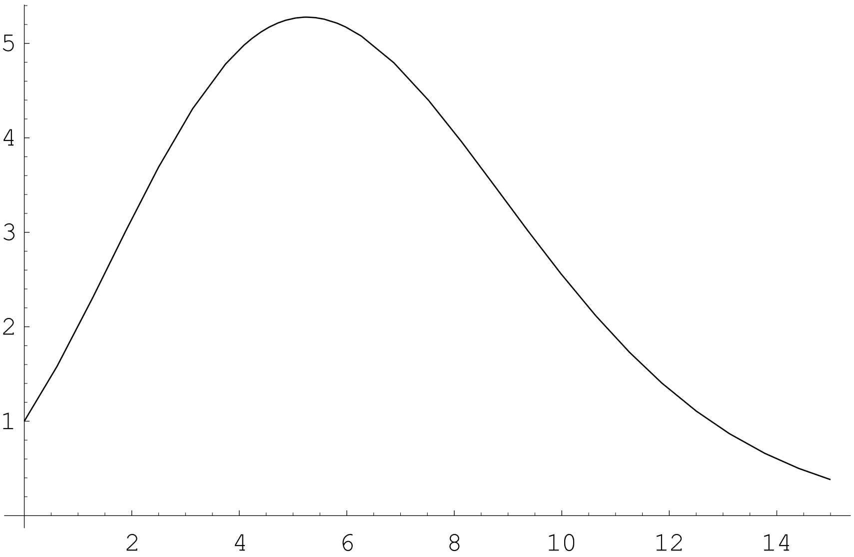

Figura 1.1: El volumen $V_n(1)$ de la esfera unitaria sobre n.

Sin embargo, resulta sorprendente que el volumen sea cada vez menor a medida que aumenta n. De hecho

$$\lim_{n\to\infty} V_n(1) = 0.$$

Lo demostramos con la ayuda de la *fórmula de Stirling*[5]

$$n! = \Gamma(n+1) \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Esto permite estimar aproximadamente el volumen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \sim \frac{2\pi^{n/2}}{n\sqrt{\pi(n-1)}}\left(\frac{2e}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \le \frac{2\cdot 4^{n/2}}{n\sqrt{n-1}}\left(\frac{2\cdot 4}{n-1}\right)^{(n-1)/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}^{\,2+2n+(n-1)+(2n-2)}}{n\sqrt{n-1}^{\,n}} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt{2}^{\,5n-1}}{\sqrt{n-1}^{\,n}}. \end{aligned}$$

Sin embargo, se aproxima a 0, ya que el primer factor se aproxima a 0 y la estimación del segundo factor es

$$\begin{aligned} &\sqrt{2}^{\,5n-1} \le \sqrt{n-1}^{\,n} \\ \Leftrightarrow\ &(5n-1)\ln\sqrt{2} \le n\ln\sqrt{n-1} \\ \Leftrightarrow\ &\ln\sqrt{2} \le \frac{n}{5n-1}\ln\sqrt{n-1} \end{aligned}$$

[5] La fórmula de Stirling se deriva en el artículo sobre el factorial.

es válida para n suficientemente grande.

Pasemos ahora a la superficie $O_n(r)$ de la esfera *n-dimensional*. El cálculo de la superficie puede hacerse utilizando

$$V_n(r) = \int_0^r O_n(t)\,dt$$

al problema ya resuelto para el volumen. El resultado es

$$O_n(r) = \frac{\partial V_n(r)}{\partial r} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}\, r^{n-1}.$$

Los 10 primeros valores se resumen en la Tabla 1.2. El gráfico continuo se muestra en la Fig. 1.2. El máximo se ha desplazado a $n \approx 7{,}26$. Sin embargo, el comportamiento asintótico no ha cambiado, es decir, también se aplica lo siguiente

$$\lim_{n\to\infty} O_n(1) = 0.$$

La prueba se recomienda como ejercicio.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$O_n(r)$	2	$2\pi r$	$4\pi r^2$	$2\pi^2 r^3$	$\frac{8\pi^2}{3} r^4$	$\pi^3 r^5$	$\frac{16\pi^3}{15} r^6$	$\frac{\pi^4}{3} r^7$	$\frac{32\pi^4}{105} r^8$	$\frac{\pi^5}{12} r^9$
$O_n(1)$	2,00	6,28	12,57	19,74	26,32	31,01	33,07	32,47	29,69	25,50

Tabla 1.2: Superficie $O_n(r)$ de la esfera n-dimensional.

Cálculo con coordenadas esféricas

Se puede calcular más rápidamente la superficie de una esfera *de n dimensiones* si se introducen coordenadas de esfera en $\mathbb{R}^n$. A estos efectos, ni siquiera necesitamos interesarnos por cómo se hace realmente, basta con saber que es posible.

Sea $|x|$ el valor absoluto euclidiano

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

de un vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Consideramos ahora las integrales I_n en cartesianas

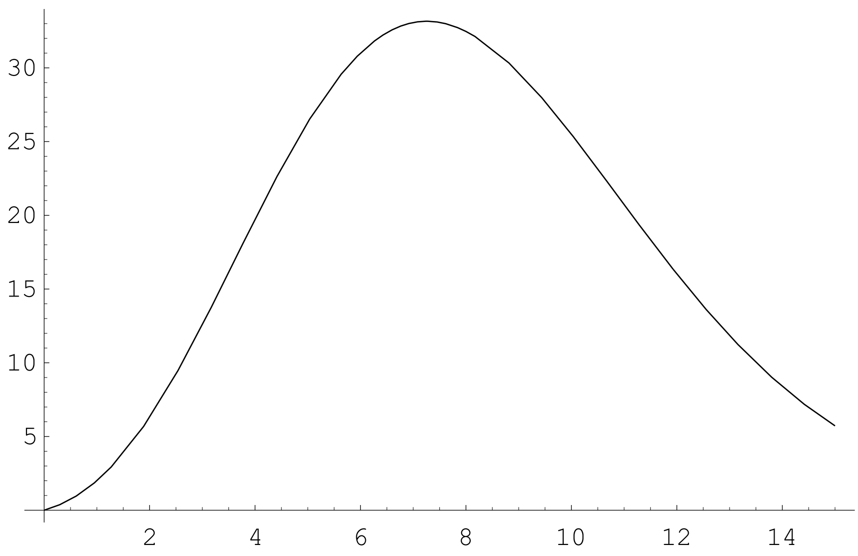

Figura 1.2: La superficie $O_n(1)$ de la esfera unitaria sobre n.

Coordenadas

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{x_n=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \cdots \int_{x_n=-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \cdots e^{-x_n^2}\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}\, dx_1\right) \cdots \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_n^2}\, dx_n\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2}\, dx_1\right)^n = I_1^n$$

y en coordenadas esféricas

$$I_n = \int_{r=0}^{\infty} \int_{S_n} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr\, d\Omega_n,$$

donde S_n denota la n-esfera y Ω_n el ángulo sólido en $\mathbb{R}^n$. Ahora

$$O_n(1) = \int_{S_n} d\Omega_n$$

y por lo tanto

$$I_n = O_n(1) \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1}\, dr.$$

[2] Con la sustitución $t = r^2$

$$\int_0^\infty e^{-r^2} r^{n-1}\, dr = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{(n-1)/2} \frac{1}{2t^{\frac{1}{2}}}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}\, t^{n/2-1}\, dt = \frac{\Gamma(n/2)}{2}$$

y por lo tanto

$$I^n = O_n(1)\frac{\Gamma(n/2)}{2}.$$

212 Dado que $\Gamma(1) = 1$ y $O_2(1) = 2\pi$, $I = \sqrt{I_2} = \sqrt{\pi}$. Esto también nos da la Resultado

$$O_n(1) = \frac{2 I_n}{\Gamma(n/2)} = \frac{2 I_1^n}{\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$